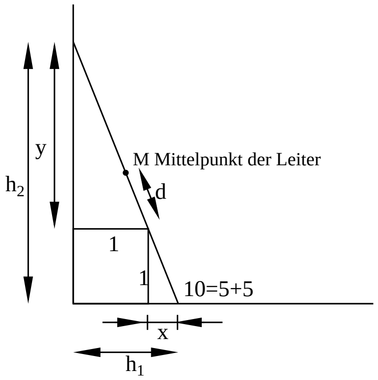
Leiter an der Wand mit quadratischem Kasten



Eine $10\,\mathrm{m}$ lange Leiter wird an eine Wand angelehnt, dann wird sie so nahe an die Wand geschoben das sie gerade eine Kante eines $1\,\mathrm{m}^3$ Würfels berührt.

Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?

Gesucht ist also $h_1 = x + 1$.

Die Tangens der beiden inneren Dreiecke sind gleich:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad xy = 1 \quad \rightarrow \quad x^2y^2 = 1^2 = 1 \tag{1}$$

Wegen dem Satz von Pythagoras gilt:

$$x^2 = (5-d)^2 - 1^2 = (6-d)(4-d) \tag{2}$$

$$y^2 = (5+d)^2 - 1^2 = (6-d)(4-d) \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{(5+d)^2 - 1} \tag{3}$$

Mit (1) findet man

$$1 = x^2y^2 = (6-d)(4-d)(6+d)(4+d) = (6^2 - d^2)(4^2 - d^2) \tag{4}$$

Setze nun $u = d^2$

$$1 = (36-u)(16+u) = 36 \cdot 16 - 36u - 16u + u^2 = 576 - 52u + u^2 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
0 &= u^2 - 52u + 575 \\
0 &= u^2 - 2 \cdot x \cdot 26 + 26^2 - 26^2 + 575 \\
0 &= (u-26)^2 - 676 + 575 \\
0 &= (u-26)^2 - 101 \\
(u-26)^2 &= 101 \\
u - 26 &= \pm\sqrt{101} \\
u &= 26 \pm \sqrt{101}
\end{aligned}$$

$$d = \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{26 \pm \sqrt{101}} < 5 \tag{6}$$

$$y = \pm\sqrt{\left(5 + \sqrt{26 - \sqrt{101}}\right)^2 - 1} > 0 \tag{7}$$

$$y = \sqrt{\left(5 + \sqrt{26 - \sqrt{101}}\right)^2 - 1} > 0 \tag{8}$$

$$h_2 = y + 1 = \sqrt{\left(5 + \sqrt{26 - \sqrt{101}}\right)^2 - 1} + 1 \approx 9.94 \tag{9}$$

$$h_1 = \sqrt{10^2 - h_2^2} \approx 1.11 \tag{10}$$