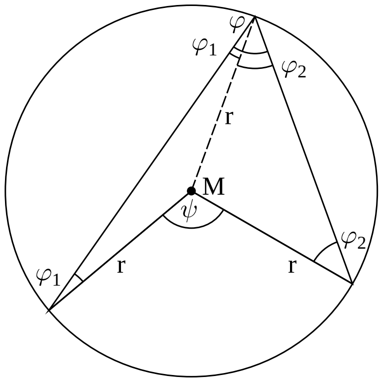
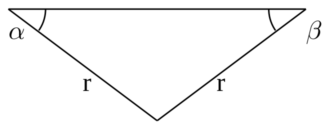
Ziege auf kreisförmiger Wiese

1. Randwinkelsatz



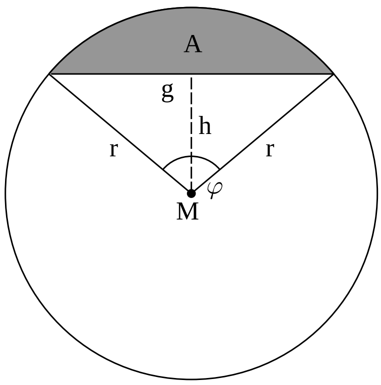
Teile auf in zwei gleichschenklige Dreiecke und für die Winkel gilt:



$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\beta} \quad \rightarrow \quad \alpha = \beta.$ Dann ist

$$\begin{aligned}
\psi &= 360° - (180° - 2\varphi_1) - (180° - 2\varphi_2) \\
&= 360° - 180° + 2\varphi_1 - 180° + 2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 \\
&= 2(\varphi_1 + \varphi_2) = 2\varphi
\end{aligned}$$

2. Fläche eines Kreissegments

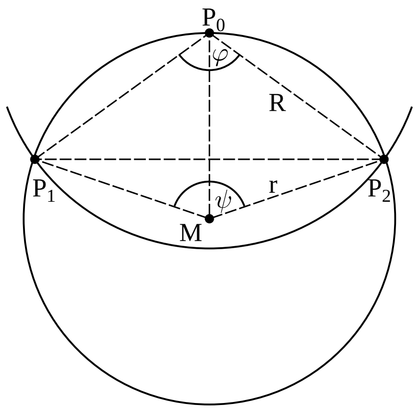


$$\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi}{360°} \cdot r^2\pi - \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2}\frac{\pi}{180°}\varphi \cdot r^2 - \frac{1}{2} g \cdot h \\
g &= \sqrt{r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\varphi} \\
h &= \sqrt{r^2 - \left(0.5\sqrt{r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\varphi}\right)^2} \\
\frac{1}{2} g \cdot h &= \frac{1}{2}\sqrt{(2r^2 - 2r^2\cos\varphi)\left(r^2 - \left(0.5\sqrt{2r^2 - 2r^2\cos\varphi}\right)^2\right)} \\
&= \frac{r^2}{2}\sqrt{(2 - 2\cos\varphi)(1 - 0.25(2 - 2\cos\varphi))} \\
&= \frac{r^2}{2}\sqrt{2(1 - \cos\varphi)(1 - 0.5 + 0.5\cos\varphi)} \\
&= \frac{r^2}{2}\sqrt{2(1 - \cos\varphi)0.5(1 + \cos\varphi)} = \frac{r^2}{2}\sqrt{1^2 - \cos^2\varphi} \\
&= \frac{r^2}{2}\sqrt{\sin^2\varphi} = \frac{r^2}{2}\sin\varphi \\
A &= \frac{1}{2}\phi \cdot r^2 - \frac{r^2}{2}\sin\phi = \frac{r^2}{2}(\phi - \sin\phi) \qquad \phi \text{ im Bogenmaß}
\end{aligned}$$

3. Weitere Formeln

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma && \text{Kosinussatz} \\
1 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi && \text{Trigonometrischer Pythagoras} \\
\sin(2\varphi) &= 2\sin\varphi\cos\varphi \\
1 + \cos\varphi &= 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
\sin(2\pi - \psi) &= -\sin(\psi)
\end{aligned}$$

4. Aufstellen der Gleichung



Mithilfe des Kosinusatzes:
$\overline{MP_1}^2 = \overline{P_0M}^2 + \overline{P_0P_1}^2 - 2 \cdot \overline{P_0M} \cdot \overline{P_0P_1} \cdot \cos(\varphi/2)$
$r^2 = r^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos(\varphi/2)$
$\boxed{R = 2r\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$
Nach dem Randwinkelsatz gilt $2\pi - \psi = 2\varphi$ oder
$\boxed{\psi = 2 \cdot (\pi - \varphi)}$

Die Fläche der Wiese ist $r^2\pi$, deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\frac{r^2\pi}{2} &= \frac{r^2}{2}(\psi - \sin\psi) + \frac{R^2}{2}(\varphi - \sin\varphi) \\
&= \frac{r^2}{2}\Big(2(\pi-\varphi) - \sin\big(2(\pi-\varphi)\big)\Big) + \frac{4r^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2}(\varphi - \sin\varphi) \\
\pi &= 2(\pi-\varphi) - \sin\big(2(\pi-\varphi)\big) + 4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)(\varphi - \sin\varphi) \\
&= 2\pi - 2\varphi - \sin(2\pi - 2\varphi) + 4\big(0.5(1+\cos\varphi)\big)(\varphi - \sin\varphi) \\
&= 2\pi - 2\varphi - \sin(2\pi - 2\varphi) + 2\varphi - 2\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\
&= 2\pi + \sin(2\varphi) - 2\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\
&= 2\pi + 2\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi \\
0 &= \pi - 2\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi
\end{aligned}$$

5. Lösung der Gleichung

$\boxed{\frac{\pi}{2} - \sin\varphi + \varphi\cos\varphi = 0}$
Offenbar muss gelten $0 < \varphi < \pi$ (siehe Skizze).
Verwendet man den *table*-Modus des Taschenrechners, so kann man aus $\frac{\pi}{2} - \sin\varphi + \varphi\cos\varphi$ die Nullstelle näherungsweise bestimmen:

Start	End	Step
0	3	0.5 $\rightarrow$
1.5	2	0.1 $\rightarrow$
1.9	2	0.01 $\rightarrow$
1.90	1.91	0.001 $\rightarrow$
1.9056	1.9057	

$\rightarrow \quad \varphi \approx 1.9057\ldots$ rad

Der gesuchte Radius ist

$$R = 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1.15872 \cdot r \quad .$$

andromeda:/home/oli/tex/bbz/problem/ziege.ps version of 5. April 2007